Georg Cantor: Das erste Diagonalverfahren

„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können“. (David Hilbert, 1925)

1. Georg Cantor

a. Werk

Normalerweise erfolgt die Aufklärung mathematischer Begriffe und Theorien mit Hilfe mehrere Mathematiker; jedoch bei dem Begriff der Unendlichkeit ist im Wesentlichen eigentlich nur Georg Cantor (1845-1918) zu nennen. Er war derjenige, der die ausschlaggebenden Resultate bezüglich des unendlich Großen erzielt hat und somit Wichtiges zur modernen Mathematik beigetragen hat.

b. Leben

Georg Cantor wird am 3.3.1845 in Sankt Petersburg geboren . Als Sohn eines vermögenden jüdischen Kaufmannes verbringt er ein Teil seiner Kindheit in Russland. 1856 zieht seine Familie nach Frankfurt am Main um. Bereits im Alter von 15 Jahren hat Cantor den Wunsch Mathematiker zu werden. Nachdem er seine Schulausbildung mit Bravur bestanden hat, studiert er in Göttingen, Zürich und Berlin Mathematik. 1867 promoviert Cantor in Berlin. Anschließend wird er Professor in Halle und lehrt dort bis zu seiner Pensionierung 1913. 1874 zeigt Cantor mit Hilfe seines ersten Diagonalverfahrens, dass die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist. 1890 gründet er die Deutsche Mathematikervereinigung, dessen erster Vorsitzender er wird. Nebenbei ist er auch an Literaturgeschichte interessiert. Cantor stirbt am 6.1.1918 in Halle an der Saale.

2. Grundlage der von Cantor begründeten Mengenlehre, Begriffsdefinitionen

Die Mengenlehre ist die mathematische Theorie, die sich mit den Eigenschaften von Mengen beschäftigt. Sie ist vor allem in der modernen Mathematik von großer Wichtigkeit und bildet eine Art Rahmen für Algebra, Analysis, Stochastik oder Topologie. Georg Cantor wird als Begründer der Mengenlehre bezeichnet. Nach seiner Definition gilt:

> *„Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedlicher Dinge unsere Anschauung oder unseres Denkens, welche Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen“*.

Um Cantors erstes Diagonalverfahren nachvollziehen zu können, nun einige Grundlagen der von ihm begründeten Mengenlehre:

- Wie bereits im Zitat angeführt wird, besitzt jede Menge Elemente. Wenn nun zum Beispiel x ein Element aus der Menge A ist, dann schreibt man $x \in A$
- Jede Menge kann auch selbst ein Element einer anderen Menge sein, hierbei spricht man von einer Teilmenge. Zum Beispiel: wenn jedes Element der Menge A auch Element der Menge B ist, dann bezeichnet man A als eine Teilmenge von B und schreibt $A \subseteq B$.
- **Bijektion**: eine Abbildung, die jedem Element der einen Menge je ein Element der anderen Menge zuordnet, und umgekehrt. Zum Beispiel: ein Tanzkurs, jeder hat einen Partner, keiner steht alleine da und keiner muss mit zwei Personen tanzen.
  $\rightarrow$ haben zwei Mengen diese Eigenschaft (können durch eine Bijektion aufeinander abgebildet werden), besitzen sie **gleiche Mächtigkeit**.
- Ist eine Menge M zur Menge der natürlichen Zahlen (0, 1, 2, 3, usw.) gleichmächtig, dann nennt man M **abzählbar unendlich**.
- **Definition der Unendlichkeit**: eine Menge ist unendlich groß, wenn sie gleichmächtig zu einer ihrer echten Teilmengen selbst ist. Beispiel: man nehme aus der Menge der natürlichen Zahlen die Quadratzahlen, welche eine Teilmenge der natürlichen Zahlen darstellen. Jetzt kommt der Clou: Obwohl die Quadratzahlen eine Teilmenge der natürlichen Zahlen darstellen, sind sie jedoch auch gleichmächtig zu ihnen. Hat sich da etwa ein Paradoxon eingeschlichen?? Nein, hier die Erklärung:

1	$\leftrightarrow$	1
2	$\leftrightarrow$	4
3	$\leftrightarrow$	9
4	$\leftrightarrow$	16
5	$\leftrightarrow$	25
6	$\leftrightarrow$	36

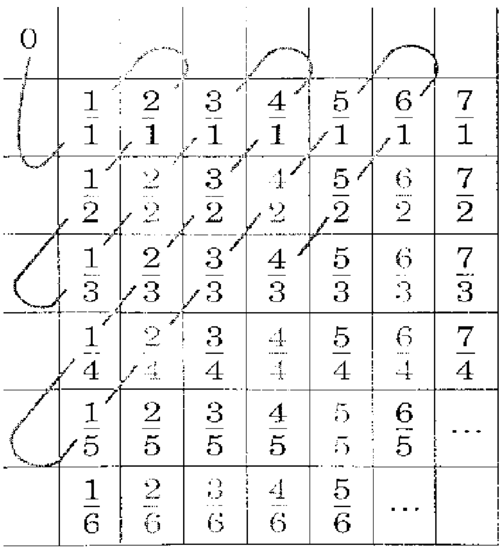
Es gibt zu jeder natürlichen Zahl eine passende Quadratzahl. Deshalb ist die Menge der natürlichen Zahlen zur Menge der Quadratzahlen gleichmächtig.

 Also doch kein Paradoxon!!!!!!!!!!!!!

3. Cantors Diagonalverfahren

Das Cantorsche Diagolnalverfahren zeigt , dass gewisse scheinbar verschiedengroße Mengen gleichgroß sind. Georg Cantor wies mit diesem Verfahren nach, dass die positiv rationalen Zahlen(z.B, 1/3, 4/9, 5/4,...) abzählbar unendlich und somit gleichmächtig zu den natürlichen Zahlen sind.

Vorgehen der Cantor Diagonalisierung:



Erklärung: In der ersten Zeile stehen alle Brüche mit dem Nenner 1, in der zweiten mit dem Nenner 2 usw. Jetzt muss man versuchen „einen Faden Durch die Zahlenlandschaft zu ziehen“. Dabei wird jeder rationalen Zahl genau eine natürliche Zahl zugeordnet (hierbei werden alle Brüche, die den gleichen Wert haben gekürzt). In der oben abgebildeten Darstellung wird deutlich, dass man mit diesem Verfahren an allen existierenden rationalen Zahlen vorbei kommt.

Zur genaueren Veranschaulichung:
Man stelle sich ein Theater vor, jede rationale Zahl bzw. jeder Bruch ist ein Theaterbesucher und jede natürliche Zahl ist ein Sitzplatz. Jeder Besucher hat genau aine Theaterkarte für einen Platz. Es gibt also während der Vorstellung genausoviele Theaterbesucher wie Sitzplätze bzw. rationale Zahlen wie natürliche Zahlen.

Bemerkung: Nun könnte natürlich so mancher denken, dass wir gegen Gleichberechtigung sind und die negativen rationalen Zahlen einfach außen vor lassen. Das Diagonalverfahren funktioniert jedoch auch genauso, wenn man sie mit einbezieht: man wächselt beim Erstellen des Zählmusters einfach zwischen dem positiven und dem negativen Wert einer rationalen Zahl ab. (1/1,-1/1,2/1,-2/1 usw.).

Cantor hat mit seiner Superwaffe , dem Diagonalverfahren, das Paradoxon der Unendlichkeit zumindestens teilweise vernichtet!

4. Quellenangabe:

- Analysis Leistungskurs, Klett, Baden-Württemberg
- „Cantor fragt: unendlich = unendlich?“ aus mathematik lehren/ Heft 112
- http://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Diagonalisierung
- http://de.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
- http://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre
- http://www.learntix.de

Autoren: Charlotte Andreae und Laura Franke